

REFLEXIONS SUR LES COQUES

ALAIN MARTY
INGENIEUR ECL
ARCHITECTE DPLG

JUIN 1969 - AOUT 1991

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS

PRESENTATION

A RAPPELS DE GEOMETRIE ET D'ELASTICITE EN NOTATION TENSORIELLE

- 1 ALGEBRE TENSORIELLE
- 2 ANALYSE TENSORIELLE
- 3 LE PROBLEME DE LA CONNEXION AFFINE
- 4 LA DERIVEE COVARIANTE
- 5 INTRODUCTION DE LA METRIQUE
- 6 LA COURBURE
- 7 EQUATIONS D'EQUILIBRE D'UN MILIEU ELASTIQUE
- 8 RELATIONS DEPLACEMENT / DEFORMATION
- 9 COEFFICIENTS D'ELASTICITE POUR UN MILIEU HOMOGENE ISOTROPE

B ETABLISSEMENT DES EQUATIONS GENERALES DES COQUES MINCES

- 1 EXPOSE DU PROBLEME
- 2 SYSTEME DE COORDONNEES NORMALES DANS S3
- 3 RELATIONS ENTRE LES GRANDEURS GEOMETRIQUES DE S3 ET DE S2
- 4 CALCUL DIFFERENTIEL ABSOLU DANS S2
- 5 FORMULATION DES RESULTATS DE LA THEORIE DES SURFACES
- 6 EQUATIONS D'EQUILIBRE DANS S3
- 7 EQUATIONS D'EQUILIBRE DANS S2
- 8 EQUATIONS D'EQUILIBRE DES COQUES MINCES
- 9 EQUATIONS D'EQUILIBRE DES VOILES MINCES
- 9 COEFFICIENTS D'ELASTICITE
- 10 TENSEUR DES DEFORMATIONS
- 11 EQUATIONS GENERALES DES COQUES MINCES

C REFLEXIONS SUR LES EQUATIONS DES VOILES MINCES

- 1 DEFINITION DU PROBLEME
- 2 PREMIERE TRANSFORMATION DES EQUATIONS
- 3 DEUXIEME TRANSFORMATION DES EQUATIONS
- 4 TROISIEME TRANSFORMATION DES EQUATIONS
- 5 PROBLEME DE LA FONCTION DE FORCE
- 6 DISCUSSION SUR LA DIVERGENCE D'UN TENSEUR
- 7 CONCLUSION

F BIBLIOGRAPHIE

AVANT PROPOS

L'étude qui suit est la **réécriture de la seconde partie d'un diplôme** de fin d'études des élèves-ingénieur Vladimir Gantchenko et Alain Marty, présenté le 23 Juin 1969 à l'ECOLE CENTRALE DE LYON.

L'origine de ce diplôme est l'intérêt porté aux structures spatiales continues et élastiques, **les coques**, et en particulier au problème de l'**optimisation** de la forme de ces structures au cas de charge donné.

Le travail devait normalement comprendre deux étapes successives:

1) une étude préalable des méthodes de résolution des problèmes faisant intervenir les surfaces courbes quelconques, domaine vaste qui n'avait pas été abordé dans le cours de résistance des matériaux de l'Ecole,

2) et l'application des méthodes étudiées à un cas concret proposé par MM Lafoucrière et Chery professeurs en physique nucléaire (une cuve torique de 5 m placée dans l'entrefer d'une double nappe conique de spectrographe de masse).

Les deux "étapes" furent en réalité traitées en parallèle:

La cuve fut donc étudiée complètement par Vladimir Gantchenko utilisant les méthodes classiques sur une forme d'hyperboloïde de révolution asymptotique aux deux nappes coniques et fermé par une portion de sphère orthogonale; afin de limiter les grands efforts de compression à la gorge et de limiter les instabilités difficiles à calculer, l'hyperboloïde fut mis en tension sur la périphérie (comme un tambour tiré par la sphère) et les efforts de flexion apparaissant au raccordement entre les deux surfaces furent calculés et repris par une surépaisseur locale (ceinture). Mais au moment de passer à une forme optimisée, par exemple en créant une ondulation du bord de l'hyperboloïde destinée à y absorber tangentiellement les efforts de flexion, ces méthodes se révélèrent naturellement complexes et assez hétérogènes .

L'étude générale des coques de forme quelconque fut entreprise par Alain Marty avec comme objectif de dégager une méthode systématique de formation et d'études des équations des coques, susceptible d'être applicable en particulier au problème d'optimisation rencontré sur la cuve.

Si le raccordement entre les études ne put pas être réalisé dans les temps, ces deux approches parallèles eurent au moins le mérite de montrer l'étendue et la complexité du problème des coques ...

Ce qui suit est une réécriture et une relecture, faites à 22 ans d'intervalle.

Une réécriture dactylographiée plus lisible d'un document manuscrit, et une relecture comportant les corrections, améliorations et simplifications jugées indispensables, ainsi que le traitement complet d'un cas très simple, mise à plat nécessaire de formules un peu éthérées, et peut-être, avec l'aide des nouveaux outils informatiques devenus accessibles, nouveau point de départ vers de nouvelles recherches et applications...

A PRESENTATION

Les coques considérées comme structure bidimensionnelle tentent de répondre au besoin d'économie de matière par un certain degré d'adaptation de la forme au cas de charge donné. On obtient des formes d'autant plus complexes qu'on veut économiser de la matière, la limite théorique étant atteinte au moment où, grace aux propriétés géométriques de la surface, tous les points du milieu élastique sont soumis à la contrainte maximale qu'il peut supporter.

Le problème géométrique est donc fondamental dans l'étude des coques.

On peut donner quelques exemples de telles structures:

- la poutre mince en I remplaçant la poutre épaisse rectangulaire;
- la tôle ondulée mince remplaçant la plaque plane épaisse;
- la coupole mince remplaçant la plaque plane épaisse;
- les ondulations sur les bords d'une coupole remplaçant la surépaisseur nécessaire à la reprise des efforts de flexion aux appuis (continus ou discrets);
- la coquille Saint Jacques adaptant les ondulations aux variations de courbure de la surface et à son épaisseur...

Un grand nombre de méthodes permettent de déterminer les contraintes connaissant le cas de charge et la forme de la surface, mais ces méthodes sont habituellement adaptées à des surfaces classiques, telles la sphère, le cylindre, le cône, les paraboloides hyperboliques, etc...; les équations sont le plus souvent écrites dans des systèmes de coordonnées liés à la forme de la surface (cartésien, cylindrique, sphérique...), ce qui multiplie le nombre des méthodes. De plus, quand on sort des formes classiques des coques, écrire les équations et les résoudre devient de plus en plus inextricable.

Et surtout peut être, le problème inverse de la détermination de la forme de la surface connaissant un cas de charge et un état de contraintes (appelé aussi **problème funiculaire généralisé**) ne peut évidemment pas être abordé de façon naturelle dans ce cadre, puisque la forme de la surface est une donnée du problème et que les équations sont écrites dans un système de coordonnées adapté à la forme donnée a priori.

On ressent donc rapidement le besoin de mieux poser le problème du point de vue géométrique, et de choisir l'outil mathématique le mieux adapté à ce type de problème. Nous nous sommes ainsi donnés pour tâche de réécrire et d'analyser les équations des coques minces en utilisant le **formalisme tensoriel**, outil qui nous paraît présenter pour le moins les avantages suivants:

1 - le formalisme tensoriel couvre totalement les domaines de l'analyse et de la géométrie différentielle qu'il **généralise** de façon **élégante**;

2 - par l'**unicité de langage**, le formalisme tensoriel permet de rattacher les problèmes des coques minces à toute une série de problèmes connus et bien traités sinon résolus de la **physique mathématique**: équations de Laplace,

biharmoniques, fonctions de force, courbure de l'espace en relativité générale (qui est aussi un problème de type funiculaire généralisé !)...;

3 - par l'utilisation du **repère mobile** il permet une étude locale de la surface, ainsi que l'écriture des équations sous une forme **invariante** dans un changement de coordonnées; on exprime donc ainsi des propriétés **intrinsèques** du problème et, quand on est amené à faire des approximations, celles-ci ont un **sens physique** puisqu'elles traduisent des propriétés invariantes;

4 - le formalisme tensoriel donne enfin un **cadre cohérent** à l'étude des problèmes non linéaires en élasticité et en particulier à la stabilité.

Le travail a donc consisté en une série de recherches bibliographiques faites dans les domaines se rapportant aux coques, à l'élasticité et au calcul tensoriel, et a trouvé son réel point d'orgue dans un article: "*Réflexions préliminaires sur l'emploi de la notion de tenseur dans la théorie des voiles*", de PRUNIERAS et CHEVALLIER, dans les Annales des Ponts et Chaussées de 1965 tome V.

Dans cet article, ces deux ingénieurs appliquent aux problèmes des voiles une **méthode de décomposition** d'équations par passage d'une variété $S(n)$ à une sous-variété $S(n-1)$ (hypersurface), utilisée entre autre en Relativité Générale par A. LICHTNEROWITZ dans une théorie unitaire pentadimensionnelle.

Cette méthode nous paraît centrale: elle s'appuie sur un formalisme strictement tensoriel aboutissant à des équations concentrées et "lisibles" et sur l'utilisation systématique de la décomposition $S(n) \rightarrow S(n-1)$. On sait qu'à l'étranger, le formalisme tensoriel est utilisé systématiquement dans les problèmes de coques; il est nécessaire de l'employer quand on aborde le non linéaire; même dans le cas où l'on ne sait pas trouver les solutions analytiques, la forme concentrée des équations se prête plus naturellement à une programmation plus systématique; enfin le formalisme tensoriel autorise l'utilisation de la méthode de la décomposition qui apporte une grande clarté "mécanique" dans le processus de formation des équations et des relations entre les contraintes et les déformations.

On trouvera ci-après un rappel sur l'analyse tensorielle et sur l'élasticité tridimensionnelle en notation tensorielle et en coordonnées curvilignes, un exposé commenté de la méthode de décomposition aboutissant aux équations générales des coques minces, une étude des solutions des équations du cas particulier constitué par les voiles minces, la recherche d'analogies avec certains problèmes de la physique mathématique, et un exemple d'application au cas du voile sphérique.

A RAPPELS DE GEOMETRIE ET D'ELASTICITE EN NOTATION TENSORIELLE

01 ALGEBRE TENSORIELLE

Concernant l'algèbre tensorielle, nous ne donnerons que quelques rappels des notations. Les vecteurs seront écrits en gras.

Etant donné un repère formé par les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_i$, un vecteur s'écrit:

$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$, dans lequel les A^i sont les composantes contravariantes, les composantes covariantes d'un vecteur sont données par: $A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$

le produit scalaire s'écrit: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i B_i = g_{ij} A^i B^j$ avec $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$

un tenseur: $\mathbf{T} = t_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

Dans un changement de repère défini par $\mathbf{e}_i = a^j_i \mathbf{f}_j$, les composantes du vecteur $\mathbf{A}$ et du tenseur $\mathbf{T}$ se transforment suivant les formules:

$$A^i = b^i_j A'^j \quad (\text{d'où le nom contravariant})$$

$$A_i = a^j_i A'_j \quad \text{avec } b^i_j a^k_i = \delta^k_j$$

$$t_{ij} = a^k_i a^l_j t'_{kl}$$

Remarque: les relations où n'interviennent que des tenseurs ont une forme indépendante du repère utilisé. Leur forme est invariante et traduit donc des propriétés intrinsèques du problème étudié.

02 ANALYSE TENSORIELLE

On obtient un système de coordonnées curvilignes quand on se donne des fonctions vectorielles plusieurs fois différentiables $y^i = f^i(x^j)$ avec $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$ telles que l'inversion $y^i = g^i(x^j)$ soit possible. Les $x^j = C^{\text{ste}}$ définissent les surfaces coordonnées, et leurs intersections sont les courbes coordonnées. On peut dire qu'on obtient une variété $\mathbf{V}$ définie par une représentation paramétrique qui peut être considérée comme une variété intrinsèque de dimension p , et les paramètres admissibles s'interprètent comme des coordonnées locales sur $\mathbf{V}$ d'un point $\mathbf{M}(u^a)$.

Les vecteurs $\mathbf{e}_a = \partial \mathbf{M} / \partial u^a$ ou encore $\mathbf{e}_a = \partial_a \mathbf{M}$ sont indépendants et déter-

minent la variété linéaire tangente à $\mathbf{V}$ en (u^a) . Ils forment le repère local. On peut par l'intermédiaire de la variété linéaire tangente localement, étendre aux variétés quelconques les propriétés définies en algèbre tensorielle. Mais par cet artifice de la linéarisation (qui ne peut se faire que localement) on introduit le problème fondamental suivant: étudier le passage d'une variété linéaire tangente en un point à une autre tangente en un autre point.

03 LE PROBLEME DE LA CONNEXION AFFINE

Soit un point $\mathbf{M}(y^i)$ d'une variété V_n et le repère local attaché $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{M}$

Il s'agit de déterminer par rapport au repère naturel $(\mathbf{M}, \mathbf{e}_i)$ en $\mathbf{M}$ le repère naturel $(\mathbf{M} + d\mathbf{M}, \mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i)$ au point infiniment voisin $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$.

La position du repère naturel $(\mathbf{M} + d\mathbf{M}, \mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i)$ en $\mathbf{M}$ sera parfaitement déterminée par rapport à $(\mathbf{M}, \mathbf{e}_i)$ si nous connaissons les composantes contravariantes, par rapport aux $\mathbf{e}_i$ des vecteurs $d\mathbf{M}$ et $d\mathbf{e}_i$. On peut écrire:

$$d\mathbf{M} = dy^i \mathbf{e}_i$$

$$d\mathbf{e}_i = \omega^j_i \mathbf{e}_j = G^j_k dy^k$$

les ω^j_i étant les composantes contravariantes des $d\mathbf{e}_i$ sont aussi des formes différentielles linéaires des dy^i qu'on peut écrire: $\omega^j_i = G^j_k dy^k$, les G^j_k désignant n^2 fonctions des variables y^i . Les G^j_k sont les symboles de *connexion affine*; et leur connaissance permet de définir un repère par rapport à un autre infiniment voisin.

04 LA DERIVEE COVARIANTE

Soit un vecteur $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$

Son accroissement $d\mathbf{A} = dA^i \mathbf{e}_i + A^i d\mathbf{e}_i$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} &= dA^i \mathbf{e}_i + A^i \omega^k_i \mathbf{e}_k \\ &= dA^i \mathbf{e}_i + A^i G^k_h dy^h \mathbf{e}_k \\ &= dA^i \mathbf{e}_i + A^k G^i_k dy^h \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

ou encore $= \nabla^i A^i \mathbf{e}_i$

avec $\nabla^i A^i = dA^i + A^h G^i_h dy^k$

$\nabla^i A^i$ s'appelle différentielle absolue de A^i ou accroissement vrai de A^i , dA^i est l'accroissement relatif et $A^h G^i_h dy^k$ l'accroissement d'entraînement.

On peut aussi l'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} \nabla^i A^i &= (\partial A^i / \partial y^k + A^h G^i_h) dy^k \\ &= (\partial_k A^i + A^h G^i_h) dy^k \end{aligned}$$

ou encore $= \nabla_k A^i dy^k$

avec $\nabla_k A^i = \partial_k A^i + A^h G^i_h$

$\nabla_k A^i$ s'appelle dérivée covariante, et a le caractère tensoriel, alors que $\partial_b A^m$ ne l'a pas.

On généralise l'expression au cas d'un tenseur quelconque:

$$\nabla_r T^{jk} = \partial_r T^{jk} + T^{sk} G^j_s + T^{jr} G^k_r$$

L'expression $\nabla_A^i = \partial_i A^i + A^h G_{hi}^i$ définit la divergence de $\mathbf{A}$, et elle généralise l'expression classique $\text{div } \mathbf{A} = \partial_i A^i$.

Remarque: en axes rectilignes, les symboles de connexion affine sont identiquement nuls et la dérivée covariante redonne la dérivée classique $\partial_i A^i$.

Les formules traduisent des propriétés intrinsèques du problème étudié et faisant intervenir des dérivées doivent être écrits en axes curvilignes avec les dérivées covariantes.

05 INTRODUCTION DE LA METRIQUE

En définissant la métrique par $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, on peut expliciter les symboles de connexion affine, sous certaines réserves précisées plus loin.

$$\begin{aligned} \text{En posant } G_{kj} &= g_{ks} G_{sj} \\ \text{et en écrivant } dg_{ij} &= d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j \\ &= (G_{sj} + G_{si}) dy^s \end{aligned}$$

$$\text{et l'on obtient: } \partial_s g_{ij} = G_{sj} + G_{si}$$

et en faisant une permutation circulaire sur les indicies, on aboutit à

$$G_{kji} = 1/2 [\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}]$$

Les membres de droite sont les symboles de Christoffel. Les formules de raccordement sont donc ainsi explicites en fonction des seuls g_{ij} . Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs; ils sont symétriques par rapport à leurs indices extrêmes. Suivent divers résultats utiles:

$$\text{Théorème de Ricci: } \nabla_k g_{ij} = 0$$

$$\text{exemple d'application: } \nabla_k A^i = \nabla_k g^{ij} A_j = g^{ij} \nabla_k A_j$$

$$\text{Dérivée des vecteurs unitaires: } \nabla_i \mathbf{e}_j = \partial_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k G_{kj}^i = 0$$

Pour une métrique définie par $ds^2 = du^2 + G(u,v) dv^2$,

$$G_{21}^1 = -1/2 \partial_u G, \quad G_{12}^2 = 1/2 G \partial_u G, \quad G_{22}^2 = 1/2 G \partial_v G$$

Pour la sphère définie par $ds^2 = r^2 dq^2 + r^2 \sin^2 q dj^2$,

$$G_{21}^1 = -r^2 \sin q \cos q, \quad G_{12}^2 = r^2 \cot q, \quad G_{22}^2 = 0$$

06 LA COURBURE

Dans un repère rectiligne, les dérivées secondes sont symétriques:

$$\partial_p \partial_n A_j - \partial_n \partial_p A_j = 0$$

Il n'en est pas de même en coordonnées curvilignes.

Soit la dérivée covariante d'un vecteur:

$$\nabla_n A_j = \partial_n A_j + A_l G^l_n$$

Une seconde dérivation covariante conduit à:

$$\begin{aligned} \nabla_p (\nabla_n A_j) &= \nabla_p \nabla_n A_j = \partial_p (A_{j,n}) - A_{l,n} G^l_p - A_{j,l} G^n_l = \\ \partial^2_{np} A_j - \partial_p A_l G^n_l - \partial_n A_l G^l_p - A_l \partial_p G^l_n + A_k G^l_p G^k_n - A_{l,j} G^n_l + A_k G^n_l G^k_j \end{aligned}$$

et, en exprimant la différence des dérivées, n et p étant interchangeés, à:

$$\nabla_p \nabla_n A_j - \nabla_n \nabla_p A_j = R^l_{jnp} A_l$$

avec
$$R^l_{jnp} = \partial_n G^l_p - \partial_p G^l_n - G^n_s G^s_p - G_p^s G^s_n$$

expression indépendante du vecteur et appelée tenseur de Riemann-Christoffel.

On peut construire le tenseur de courbure:

$$R_{rjnp} = g_{rl} R^l_{jnp} =$$

$$1/2 (\partial^2_{jn} g_{rp} + \partial^2_{rp} g_{jn} - \partial^2_{jp} g_{rn} - \partial^2_{jp} g_{rn}) + g^{ts} (G_{sn} G_{rp} - G_{sp} G_{tn})$$

qui possède $1/12 N^2(N^2-1)$ composantes distinctes (N étant la dimension). Pour N=3 il possède 6 composantes et pour N=2 une seule composante distincte.

Pour une variété dont la métrique est donnée par $ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$, la seule composante est $R_{1212} = -G\partial_u^2 G$.

Pour la sphère, on obtient donc $-r^2 \sin^2 \theta$

On appelle tenseur de Ricci le tenseur contracté: $R_{jn} = R^l_{jnl} = g^{ls} R_{sjnl}$

et invariant de courbure le tenseur contracté: $R = g^{jn} R_{jn}$

Pour une variété de dimension 2, on a les relations:

$$R_{ij} = -1/g g_{ij} R_{1212} \quad R_{ij} = 1/2 g_{ij} R$$

$$R = -2/(g) R_{1212}$$

On appelle courbure de Riemann l'invariant: $K = 1/(g) R_{1212}$

Pour la sphère, on obtient ainsi:

$$R_{11} =$$

$$R_{22} =$$

$$R =$$

$$K =$$

07 EQUATIONS D'EQUILIBRE D'UN MILIEU ELASTIQUE

Les forces avec lesquelles une partie quelconque d'un corps est sollicitée par les parties contigües ne peuvent agir que directement au travers de la surface de cette partie. Par conséquent chacune des trois composantes $\oint_V F^i dv$ de la résultante de toutes les contraintes internes peut être transformée en intégrale prise sur la surface du volume: F^i doit être la divergence d'un tenseur du second ordre:

$$F^i = \nabla_k n^{ik}$$

En l'absence de densité de couple: $n^{ik} = n^{ki}$, et en appelant : $F^i = -F^i$ les forces extérieures, les équations d'équilibre s'écrivent:

$$\nabla_k n^{ik} + F^i = 0 \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3$$

et $n_k n_0^{ik} + F_0^i = 0 \quad \text{pour conditions aux limites,}$

avec n^{ik} : composantes contrevariantes du champ tensoriel des tensions qui se transforme comme une densité
 F^i : composantes contrevariantes de la force par unité de volume
 n_k : composantes covariantes de la normale à la surface limitant le corps
 F_0^i : composantes contrevariantes de la force par unité de surface limitant le corps

08 RELATIONS DEPLACEMENT / DEFORMATION

Le tenseur de déformation e_{ij} se calcule par la différence des métriques du milieu continu avant et après déformation, rapportée au milieu avant déformation:

$$ds^2 = e_{ij} dx_i dx_j$$

Sous réserve qu'il ne fasse intervenir que des tenseurs, ce calcul peut être effectué plus simplement dans un repère rectiligne et généralisé ensuite au cas du repère quelconque.

Soit un déplacement $x_i = x_0^i + X_i$; on peut écrire:

$$\begin{aligned} dx_0^i &= dx_i - \partial_k X_i dx_k \\ &= dx_i (d_{ik} - \partial_k X_i) \end{aligned}$$

$$ds^2 = d_{ij} dx_i dx_j$$

$$\begin{aligned} ds_0^2 &= d_{ij} dx_0^i dx_0^j \\ &= d_{ij} (d_{ik} - \partial_k X_i)(d_{jm} - \partial_j X_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds_0^2 &= d_{ij} (d_{ik} - \partial_k X_i)(d_{jm} - \partial_j X_m) \\ &= d_{ij} dx_i dx_j - dx_k dx_m [d_{jk} \partial_m X_j + d_{im} \partial_k X_i - \partial_m X_i \partial_m X_j] \end{aligned}$$

$$= ds^2 - e_{ij} dx_i dx_j \quad \text{avec} \quad 2 e_{ij} = \partial_i X_j + \partial_j X_i - \partial_i X_m \partial_j X_m$$

Ce résultat s'écrit dans un repère quelconque:

$$2 \epsilon_{ij} = -x_j + -x_i - x_m - x^m$$

et pour une déformation infinitésimale:

$$\epsilon_{ij} = 1/2 [-x_j + -x_i]$$

L'expression de ce tenseur montre qu'il est symétrique. Il doit de plus satisfaire à un certain nombre de conditions de compatibilité; en effet l'espace ambiant étant euclidien le tenseur de Riemann-Christoffel est nul avant et après la déformation. En définissant les symboles de Christoffel relatifs à la métrique ϵ_{ij} :

$$G_{ln} = 1/2 [\partial_n \epsilon_l + \partial_l \epsilon_n - \partial_l \epsilon_n] \quad \text{et les } g^{pr} \text{ par:}$$

$$g^{pr} = g^{pr} (g_{ij} + 2 \epsilon_{ij}) = d_i^p d_j^r$$

on obtient les conditions:

$$\partial_j G_{ln} - \partial_l G_{jn} + g^{pr} (G_{nr} G_{lp} - G_{lp} G_{nr}) = 0$$

Dans le cas de déformations infinitésimales, ces conditions s'écrivent en explicitant les G_{ln} et annulant leurs produits en croix:

$$\partial^2_{jn} \epsilon_l + \partial^2_{jl} \epsilon_n - \partial^2_{in} \epsilon_l - \partial^2_{il} \epsilon_n = 0$$

09 COEFFICIENTS D'ELASTICITE POUR UN MILIEU HOMOGENE ISOTROPE

On définit la relation entre le tenseur des contraintes n_{ij} et le tenseur de déformation ϵ_{ij} par:

$$C_{ijkl} \epsilon_{ij} = n_{kl}$$

C_{ijkl} est un tenseur symétrique du quatrième ordre, constant (milieu homogène et isotrope). Il prend la forme générale:

$$C_{ijkl} = A g_{ij} g_{lm} + B g_{il} g_{jm} + C g_{im} g_{jl} \quad \text{avec } A, B \text{ et } C \text{ constantes}$$

On choisira la forme classique:

$$C_{ijkl} = E / 2(1+n) [g_{il} g_{jm} + g_{im} g_{jl} + 2n / (1-2n) g_{ij} g_{lm}]$$

avec E : module d'Young
 n : coefficient de Poisson

B ETABLISSEMENT DES EQUATIONS GENERALES DES COQUES MINCES

01 EXPOSE DU PROBLEME

Soit une coque mince caractérisée géométriquement par sa surface moyenne S^2 d'équation :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{r}(x^1, x^2),$$

$\mathbf{r}$ possédant des dérivées première et seconde continues.

On rapporte la portion d'espace euclidien S^3 entourant S^2 au système de coordonnées x^1, x^2, x^3 tel qu'un point P de cette portion d'espace soit défini par :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r}(x^1, x^2) + x^3 \cdot \mathbf{n}(x^1, x^2),$$

$\mathbf{n}$ étant le vecteur normal unitaire au point $\mathbf{M}(x^1, x^2)$.

Les deux surfaces parallèles limitant la coque (intrados et extrados), sont :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r}(x^1, x^2) \pm e \cdot \mathbf{n}(x^1, x^2),$$

e étant la demi-épaisseur de la coque.

Il s'agit de ramener le problème tridimensionnel défini par les équations d'équilibre (les relations contrainte-déformation-déplacement), à un problème à deux dimensions, et d'étudier ce qui se passe quand $e \rightarrow 0$. Disons tout de suite que le problème est théoriquement insoluble: les solutions trouvées ne convergent vers aucune limite et des approximations seront nécessaires pour pouvoir éliminer les difficultés.

Nous utiliserons la méthode trouvée dans l'article de Chevallier Prunieras pour transformer les équations. Nous étudierons le passage de l'espace euclidien dans lequel est plongé S à la variété riemannienne que constitue S ; nous dégagerons ensuite les règles de calcul différentiel absolu sur cette variété et formulerons en notations tensorielles les résultats classiques de la théorie des surfaces, et nous appliquerons enfin les résultats précédents au problème mécanique.

02 SYSTEME DE COORDONNEES NORMALES DANS S^3

On appellera système de coordonnées normales un système x^1, x^2, x^3 tel que la métrique de l'espace S^3 soit défini par la forme quadratique:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + dx^3 dx^3 \quad \text{pour } i, j = 1, 2.$$

Cette métrique reste invariante dans un changement de coordonnées défini par :

$$x^i = f^i(y^1, y^2)$$

$$x^3 = y^3.$$

03 RELATIONS ENTRE LES GRANDEURS GEOMETRIQUES DE S^3 ET S^2

Les grandeurs géométriques fondamentales sont le tenseur métrique, les symboles de connexion ou symboles de Christoffel faisant intervenir ses dérivées premières et le tenseur de Riemann-Christoffel faisant intervenir ses dérivées secondes.

Les grandeurs géométriques de S^3 seront écrites en gras, celles de S^2 étant en caractères normaux. Par la définition ci-dessus des g_{ij} , les relations s'écrivent:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ij} &= g_{ij} && \text{pour } i,j = 1,2 \\ \mathbf{g}_{i3} &= 0 \\ \mathbf{g}_{3j} &= 0 \\ \mathbf{g}_{33} &= 1 \end{aligned}$$

On posera: $\mathbf{W}_{ij} = 1/2 \partial_3 g_{ij}$

Relations entre les symboles de Christoffel définis par:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= 1/2 g^{js} [\partial_{ig} k_s + \partial_{kg} i_s - \partial_{sg} ik] \\ \Gamma_{ijk} &= \mathbf{G}_{ijk} \\ \Gamma_{ij3} &= \mathbf{W}_{ij} \\ \Gamma_{i3j} &= -\mathbf{W}_{ij} \\ \Gamma_{i33} &= 0 \quad \Gamma_{3i3} = 0 \quad \Gamma_{333} = 0 \end{aligned}$$

Relations entre les tenseurs de Riemann-Christoffel définis par:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k^i,ab} &= \partial_b \mathbf{G}_{k^i a} - \partial_a \mathbf{G}_{k^i b} + \mathbf{G}_{k^i a} \mathbf{G}_{ab}^i - \mathbf{G}_{k^i b} \mathbf{G}_{ab}^i \\ \mathbf{R}_{ij,rs} &= \mathbf{R}_{ij,rs} + \mathbf{W}_{ir} \mathbf{W}_{js} - \mathbf{W}_{is} \mathbf{W}_{jr} \\ \mathbf{R}_{i3,rs} &= -\mathbf{W}_{ir} \mathbf{W}_{js} - \mathbf{W}_{is} \mathbf{W}_{jr} \\ \mathbf{R}_{3i,rs} &= -\mathbf{W}_{is} \mathbf{W}_{jr} - \mathbf{W}_{ir} \mathbf{W}_{js} \\ \mathbf{R}_{ij,r3} &= -\mathbf{W}_{ij} \mathbf{W}_{r3} - \partial_3 \mathbf{G}_{ijr} \\ \mathbf{R}_{i3,r3} &= \partial_3 \mathbf{W}_{ir} - \mathbf{W}_{ik} \mathbf{W}_{kr} \\ \mathbf{R}_{3i,r3} &= -\partial_3 \mathbf{W}_{ir} - \mathbf{W}_{ik} \mathbf{W}_{kr} \\ \mathbf{R}_{33,rs} &= 0 \\ \mathbf{R}_{33,r3} &= 0 \end{aligned}$$

04 CALCUL DIFFERENTIEL ABSOLU DANS S^2

Les résultats que nous allons donner sont invariants dans les changements de coordonnées laissant la métrique invariante. On démontre qu'on peut créer des champs tensoriels de S^2 à partir de champs tensoriels de S^2 . Par exemple, d'un tenseur T^{ij} de l'espace S^3 , on peut extraire:

- 1) un tenseur $t^{ij} = T^{ij}$ dans S^2 (c.a.d pour $i, j = 1, 2$)
- 2) deux vecteurs $u^i = T^{i3}$ et $v^i = T^{3i}$
- 3) un invariant (scalaire) $w = T^{33}$

Pour ne pas multiplier les définitions en cascade, on conservera par la suite les écritures de S^3 , par exemple T^{i3} et T^{33} pour u^i et w .

Relations entre les dérivées covariantes d'un vecteur v_i définies par:

$$\nabla_j v_i = \partial_j v_i + v_s \Gamma_{ji}^s$$

$$\nabla_j v_i = -\Gamma_{ji}^3 v_3 + W_{ij} v_3$$

$$\nabla_3 v_i = \partial_3 v_i - W_i^k v_k$$

$$\nabla_i v_3 = \partial_i v_3 - W_i^k v_k$$

$$\nabla_3 v_3 = \partial_3 v_3$$

Relations entre les divergences d'un tenseur du second ordre n^{ij} définies par:

$$\nabla_k n^{ij} = \partial_k n^{ij} + n^{sj} \Gamma_{sk}^i + n^{is} \Gamma_{sk}^j \quad \text{avec } k=j$$

soit
$$\nabla_j n^{ij} = \partial_j n^{ij} + n^{sj} \Gamma_{sj}^i + n^{is} \Gamma_{sj}^j$$

$$\nabla_j n^{ij} = -\Gamma_{ji}^3 n^{ij} + W_{ji}^3 n^{i3} + W_{ji}^i n^{3j} + \partial_3 n^{i3} + W_{ji}^i n^{i3}$$

$$\nabla_j n^{3j} = -\Gamma_{ji}^3 n^{3j} + W_{ji}^3 n^{33} + \partial_3 n^{33} - W_{ij}^3 n^{ij}$$

Ces dernières relations sont fondamentales pour l'écriture des équations d'équilibre des coques minces.

05 FORMULATION DES RESULTATS DE LA THEORIE DES SURFACES

Soit dans S^3 une surface : $OM = r(x^1, x^2)$ ou $OM = r(x^S)$ pour $s = 1, 2$

Le repère local est défini par :

$$(\partial_1 M, \partial_2 M, n) \quad \text{où } n = (\partial_1 M \times \partial_2 M) / [\partial_1 M \times \partial_2 M]$$

La définition classique de la première forme quadratique de la surface s'écrit :

$$E = \partial_1 M \cdot \partial_1 M = g_{11}(M)$$

$$F = \partial_1 M \cdot \partial_2 M = g_{12}(M)$$

$$G = \partial_2 M \cdot \partial_2 M = g_{22}(M)$$

On définit également de façon classique :

$$H^2 = EG - F^2 = g = \det(g_{ij})$$

La définition classique de la seconde forme quadratique de la surface s'écrit :

$$L = n \cdot \partial^2_{11} M = -\partial_1 n \cdot \partial_1 M = -W_{11}(M)$$

$$M = n \cdot \partial^2_{12} M = -\partial_1 n \cdot \partial_2 M = -W_{12}(M)$$

$$N = n \cdot \partial^2_{22} M = -\partial_2 n \cdot \partial_2 M = -W_{22}(M)$$

En rapportant l'espace S^3 aux coordonnées normales x^S et définissant un point P de S^3 par $OP = r(x^S) + x^3 n(x^S)$, nous obtenons les relations suivantes liant la métrique et de la courbure quand on se déplace sur la normale à la surface S^2 :

$$\begin{aligned} g_{ij}(P) &= \partial_i P \cdot \partial_j P \quad \text{par définition de la métrique} \\ &= \partial_i(M + x^3 n) \cdot \partial_j(M + x^3 n) \\ &= \partial_i M \cdot \partial_j M + 2 x^3 \partial_i n \cdot \partial_j M + x^3 x^3 \partial_i n \cdot \partial_j n \\ &= g_{ij}(M) + 2 x^3 W_{ij} + x^3 x^3 \partial_i n \cdot \partial_j n \\ &= g_{ij}(M) + 2 x^3 W_{ij} \quad \text{pour } x^3 \text{ petit} \end{aligned}$$

Dans ce cas, en posant: $W_j = d_j + x^3 W_j$ on peut écrire:

$$g_{ij}(P) = g_{hk}(M) W_i^h W_j^k$$

$$g_{i3} = 0$$

$$g_{3j} = 0$$

$$g_{33} = 1$$

On peut de même exprimer les relations entre les W_j et les G_{jk} :

$$W_{ij}(P) = W_{ij}(M) W_j^k \quad \text{et quand l'inverse de } W_j^i \text{ est défini :}$$

$$G_{jk}(P) = G_{jk}(M) + W_{pj} \rightarrow W_k^p$$

On obtient des relations complémentaires, les formules de Gauss-Codazzi, en écrivant que la surface est plongée dans un espace euclidien, ce qui peut s'écrire:

$$R_{ij,rs} = 0 \quad \text{soit:}$$

$$\begin{aligned}
 R_{ij,rs} &= w_{ir} w_{js} - w_{is} w_{jr} \\
 \nabla_s w_{ir} - \nabla_r w_{is} &= 0 \quad \text{et} \quad \nabla_r w_{js} - \nabla_s w_{jr} = 0 \\
 \nabla_r w_{ij} &= \partial_3 G_{jr} \\
 \partial_3 w_{ir} &= w_i^k w_{kr} \quad \text{et} \quad \partial_3 w_{rj} = -w_k^i w_{kr}
 \end{aligned}$$

Le tenseur $R_{ij,rs} = g_{ik} R_{i^k,rs}$ se réduit à une seule composante distincte:

$$R_{12,12} = w_{11} w_{22} - w_{12}^2.$$

Le tenseur contracté de Ricci s'écrit:

$$R_{ij} = -g_{ij}/g R_{12,12} \quad \text{ou:} \quad R_{ij} = 1/2 g_{ij} R \quad (R_{ij} - 1/2 g_{ij} R = 0)$$

La courbure est donnée par

$$R = -2/g R_{12,12} \quad \text{ou:} \quad R = g^{ij} R_{ij}.$$

Application de ces formules à la sphère.

Soit le point $M(x,y,z)$:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \varphi \end{array} & \begin{array}{c} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \partial_q M \quad r \cos \varphi \sin \vartheta \\ -r \sin \varphi \end{array} & \begin{array}{c} -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \partial_j M \quad -r \sin \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} -r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \partial^2_{qq} M \quad -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ -r \cos \varphi \end{array} & \begin{array}{c} \partial^2_{jj} M \\ -r \sin \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \partial^2_{jq} M \quad r \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \cos \varphi \cos \vartheta \quad -\sin \varphi \sin \vartheta \\ r^2 \cos \varphi \sin \vartheta \quad \ddot{\varphi} \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \varphi \quad 0 \end{array} & = & \begin{array}{c} \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \varphi \sin \vartheta \\ \cot \varphi \end{array} \quad |N| = r^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \cos \varphi \\ -r^3 \sin^2 \varphi \sin \vartheta \\ \cot \varphi \end{array} & \cdot & \begin{array}{c} \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \end{array} = -r^3 \sin \varphi = -\partial_q N \partial_q M
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \cos \varphi \\ -r^3 \sin^2 \varphi \sin \vartheta \\ \cot \varphi \end{array} & \cdot & \begin{array}{c} \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{array} = -r^3 \sin^3 \varphi = -\partial_j N \partial_j M
 \end{array}$$

$$n. \partial^2_{jq} M = -r^3 \sin^2 q \frac{\cos j}{\cot g q} \cdot \frac{-\cos q \sin j}{\cos q \cos j} = 0 = - \partial_j N \partial_q M$$

La première forme fondamentale est donnée par $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ avec :

$$\partial_q M \cdot \partial_q M = r^2 = g_{11} = 1/g^{11}$$

$$\partial_j M \cdot \partial_j M = r^2 \sin^2 q = g_{22} = 1/g^{22} \quad \div g = \div g_{11} g_{22} = r^2 \sin q$$

$$\partial_q M \cdot \partial_j M = 0 = g_{12} = 1/g^{12}$$

Les symboles non nuls de connexion affine sont donnés par:

$$G_2^1 = -\sin q \cos q$$

$$G_1^2 = G_2^1 = \cot g q$$

La deuxième forme fondamentale est donnée par:

$$1/\div g \partial_q N \partial_q M = r = w_{11} \quad \text{et aussi} \quad w_1^1 = g^{11} w_{11} = 1/r$$

$$1/\div g \partial_j N \partial_j M = r \sin^2 q = w_{22} \quad \text{et aussi} \quad w_2^2 = g^{22} w_{11} = 1/r$$

Remarquer que les symboles g_{ij} et w_{ij} sont dans le rapport $1/r$.

Les différentes expressions des composantes non nulles des tenseurs de Riemann-Christoffel sont:

$$R_{12,12} = w_{11} w_{22} - w_{12}^2 = r^2 \sin^2 q$$

$$R_{11} = -g_{11}/g R_{12,12} = -r^2/(r^4 \sin^2 q) r^2 \sin^2 q = -1$$

$$= 1/2 g_{11} R = 1/2 r^2 (-2/r^2) = -1$$

$$R_{22} = -g_{22}/g R_{12,12} = -r^2 \sin^2 q/(r^4 \sin^2 q) r^2 \sin^2 q = -\sin^2 q$$

$$= 1/2 g_{22} R = 1/2 r^2 \sin^2 q (-2/r^2) = -\sin^2 q$$

$$R = -2/g R_{12,12} = -2/(r^4 \sin^2 q) r^2 \sin^2 q = -2/r^2$$

$$K = 1/g R_{12,12} = 1/(r^4 \sin^2 q) r^2 \sin^2 q = 1/r^2$$

06 EQUATIONS D'EQUILIBRE DANS S^3

On est amené à réécrire les équations élastiques définies plus haut afin d'introduire le tenseur des moments, et arriver à des expressions plus connues en résistance des matériaux.

Soit un corps en équilibre de volume V et contenu dans une surface S ; les relations entre les forces extérieures $\mathbf{F}$, le tenseur des contraintes $\mathbf{N}$ et le tenseur des moments $\mathbf{M}$ en un point $\mathbf{P}$ s'obtiennent en annulant le torseur des forces en présence.

$$\int_V \mathbf{F} dv + \int_S \mathbf{N} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\int_V \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{F} dv + \int_V \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{N} dv + \int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

en appliquant le théorème d'Ostrogradsky, il vient :

$$\int_V (\mathbf{F} + \text{div}(\mathbf{N})) dv = 0$$

$$\int_V (\mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{F} + \text{grad}(\mathbf{P}) \cdot \nabla \mathbf{N} + \mathbf{P} \cdot \nabla \text{div}(\mathbf{N}) + \text{div}(\mathbf{M})) dv = 0$$

relations valables en tout point, soit:

$$\mathbf{F} + \text{div}(\mathbf{N}) = 0$$

$$\text{grad}(\mathbf{P}) \cdot \nabla \mathbf{N} + \text{div}(\mathbf{M}) = 0$$

Rapporté au repère local $\mathbf{e}_i$ et en définissant:

$$\mathbf{F} = f^i \mathbf{e}_i \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{N} = n^{ij} \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{M} = m^{ij} \mathbf{e}_j$$

$$\text{et } h^{ijk} \text{ tel que } h^{ijk} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \cdot \nabla \mathbf{e}_k$$

les 6 équations générales de l'équilibre s'écrivent alors:

$$\nabla_j n^{ij} + f^i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\nabla_j m^{ij} + h^{ijk} n^{jk} = 0$$

07 EQUATIONS D'EQUILIBRE DANS S^2

Ayant ainsi réécrit, en ajoutant le tenseur moment, les équations d'équilibre dans le cas tridimensionnel, on peut maintenant transformer ce système en un système bidimensionnel. On décomposera le système en utilisant les méthodes déjà utilisées plus haut. En particulier, on utilisera la décomposition trouvée pour la divergence d'un tenseur du second ordre.

Les deux groupes d'équations se décomposent en quatre équations relatives à ce qui se passe dans les surfaces parallèles à S^2 et en deux équations relatives à ce qui se passe sur les normales à S^2 .

Il vient:

$$\rightarrow n_{ij} + w_j n_i^3 + w_j^i n_{3j} + \partial_3 n_i^3 + w_j^i n_j^3 + f^i = 0$$

$$\rightarrow n_{3j} + w_j n_{33} + \partial_3 n_{33} - w_{ij} n_{ij} + f^3 = 0$$

$$\rightarrow m_{ij} + w_j m_i^3 + w_j^i m_{3j} + \partial_3 m_i^3 + w_j^i m_j^3 + h_{ik}^i n_{k3} + h_{k3}^i n_{3k} = 0$$

$$\rightarrow m_{3j} + w_j m_{33} + \partial_3 m_{33} - w_{ij} m_{ij} + h_{ik}^3 n_{ik} = 0$$

Aucune hypothèse, autre que la régularité des Ω_{ij} , n'a été faite jusqu'à présent ni sur la forme de la surface ni sur la nature des tenseurs n_{ij} et m_{ij} . Le système d'équations ci-dessus a la même généralité que les équations de l'équilibre dont elles sont issues, et est valable en chaque point P de l'espace entourant la surface.

On va maintenant faire un certain nombre d'hypothèses permettant de simplifier considérablement les système.

08 EQUATIONS D'EQUILIBRE DES COQUES MINCES

En supposant l'épaisseur de la coque faible:

1) on négligera les variations des g_{ij} , w_{ij} et G_{jk} et les prendre égaux aux valeurs sur la surface moyenne S^2 ;

2) on négligera les composantes n_{33} ;

3) on intégrera le groupe d'équations sur l'épaisseur $2e$ de la coque. Cela reviendra à prendre le flux des contraintes dans l'épaisseur de la surface et les composantes n_i^3 orthogonales à la surface moyenne disparaîtront (leur flux suivant l'épaisseur étant nul).

En définissant les moyennes:

$$F_i = \int_{-e}^{+e} f_i dx^3$$

$$P = \int_{-e}^{+e} f^3 dx^3$$

$$N_{ij} = \int_{-e}^{+e} n_{ij} dx^3$$

$$M_{ik} \cdot h_{jk} = \int_{-e}^{+e} m_{ij} dx^3$$

$$Q_i = \int_{-e}^{+e} n_{3i} dx^3$$

on obtient les équations d'équilibre des coques minces:

$$\rightarrow N_{ij} + w_j^i Q_i + F_i = 0$$

$$\rightarrow Q_i - w_{ij} N_{ij} + P = 0$$

$$\rightarrow M_{ij} + Q_i = 0$$

$$h_{ij}^3 N_{ij} - h_{3k} w_{ij} M_{ik} = 0$$

En éliminant Q_j et en considérant que la 4ème équation est une identité (cf page xx), on peut aussi écrire ce système sous la forme:

$$\rightarrow N_{ij} - w_k^i \rightarrow M_{kj} + F_i = 0$$

$$\rightarrow M_{ij} + w_{ij} N_{ij} - P = 0$$

08 EQUATIONS D'EQUILIBRE DES VOILES MINCES

En annulant les moments et les efforts tranchants, on obtient les équations d'équilibre des voiles minces:

$$1) \quad \rightarrow N_{ij} + F_i = 0$$

$$2) \quad - w_{ij} N_{ij} + P = 0$$

Ce système, comportant 3 équations et 3 inconnues, est isostatique.

Les conditions aux limites s'expriment en écrivant en chaque point de la ligne limitant la surface l'équilibre entre la force extérieure tangentielle appliquée par unité de longueur $\vec{f}_i$ et la composante sur la normale $\vec{n}_i$ du tenseur des contraintes $\vec{N}_{ij}$

$$\text{soit: } \vec{n}_i \cdot \vec{N}_{ij} + \vec{f}_i = 0$$

09 COEFFICIENTS D'ELASTICITE

Nous avons choisi d'écrire les relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sous la forme:

$$n_{ik} = E/2(1+n) [g_{ir} g_{ks} + g_{is} g_{kr} + 2n/(1-2n) g_{ik} g_{rs}] g_s \quad \text{pour } i,j=1,2,3$$

La décomposition donne en tenant compte des g_i^3 , g^3_i et g^{33} nuls:

$$n_{ik} = E/2(1+n) [[g_{ir} g_{ks} + g_{is} g_{kr} + 2n/(1-2n) g_{ik} g_{rs}] g_s + 2n/(1-2n) g_{ij} g_{33}]$$

$$n_i^3 = E/(1+n) g^{33} g_{is} g_s$$

$$n^{33} = E/(1-n)(1-2n) [(1-n) g_{33} + n g_{ij} g_j]$$

On néglige n^{33} comme on l'a vu plus haut et il vient, éliminant g_{33} :

$$n_{ik} = E/2(1+n) [g_{ir} g_{ks} + g_{is} g_{kr} + 2n/(1-n) g_{ik} g_{rs}] g_s \quad \text{pour } i,j=1,2$$

On a défini plus haut les tenseurs $h^{ik} = \frac{1}{2} g^{ik}$ où e^{ik} est un tenseur antisymétrique unitaire d'ordre 2. En remarquant l'identité suivante:

$$h^{ik} h_{ik} + h^{ik} h_{ik} = 2 g_{ij} g_{ij} - g_{ij} g_{ij} - g_{ij} g_{ij} -$$

les coefficients d'élasticité peuvent s'écrire sous une forme plus parlante:

$$C_{ijkl} = 1/2 [g_{ir} g_{ks} + g_{is} g_{kr} + n(h^{ik} h_{ik} + h^{ik} h_{ik})]$$

et les relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sous la forme:

$$n_{ik} = E/(1-n^2) C_{ijkl} g_{kl} \quad \text{pour } i,j=1,2$$

10 TENSEUR DES DEFORMATIONS

Il est relié au vecteur déplacement par:

$$g_j = 1/2 [-\epsilon_{ij} u_j + \epsilon_{ji} u_i] \quad \text{pour } i,j=1,2,3$$

Les formules de décomposition de $-\epsilon_{ij} u_j$ donnent:

$$\nabla_j u_i = -\epsilon_{ij} u_i + w_{ij} u_3$$

$$\nabla_3 u_i = \partial_3 u_i - w_i^k u_k$$

$$\nabla_i u_3 = \partial_i u_3 - w_i^k u_k$$

$$\nabla_3 u_3 = \partial_3 u_3$$

En reliant le vecteur déplacement U_i au point P au vecteur déplacement U^0_i au point M de la surface moyenne par $U_i = U^0_i + \epsilon_{3i} U^0_i x^3$, en négligeant la déformation $g_3 = 1/2 [-\epsilon_{33} + \epsilon_{33}]$ ce qui donne l'égalité $-\epsilon_{33} = -\epsilon_{33}$ on peut expliciter $\nabla_j u_i$ en fonction de U^0_i et de $x^3 = z$:

$$\nabla_i u_j = -\epsilon_{ij} [U^0_j - z \nabla_j U^0_3] + w_{ij} U^0_3$$

puis, assimilant U_3 à U^0_3 (pas de variation d'épaisseur) :

$$\nabla_i u_j = -\epsilon_{ij} U^0_j + w_{ij} U^0_3 - z \nabla_i \nabla_j U^0_3$$

ce qui conduit à l'expression suivante du tenseur de déformation, pour $i,j=1,2$:

$$g_j = 1/2 [[-\epsilon_{ij} U^0_j + \epsilon_{ji} U^0_i + 2w_{ij} U^0_3] - z(\nabla_i \nabla_j U^0_3 + \nabla_j \nabla_i U^0_3)]$$

Pour obtenir les relations entre les tenseurs N_{ij} , M_{ij} et les déplacements U^0_i , nous utilisons les expressions intégrales de ces tenseurs en fonction des n_{ij} et des m_{ij} . En supposant la coque mince on peut prendre les valeurs des termes géométriques des équations sur la surface moyenne. En particulier on pourra supposer les C_{ijkl} constants sur x^3 , et on obtient alors en posant $U^0_i = v_i$, $U^0_3 = w$ et $h = 2e$:

$$N_{ij} = Eh/(1-\nu^2) C_{ijkl} [-\epsilon_{kl} v_l + w_{kl} w] \quad \text{pour } i,j=1,2$$

$$M_{ij} = -Eh/12(1-\nu^2) C_{ijkl} [-\epsilon_{kl} w]$$

Dans cette approximation N_{ij} et M_{ij} sont symétriques, comme on peut le voir sur les formules des C_{ijkl} .

11 EQUATIONS GENERALES DES COQUES MINCES

Considérons la dernière équation d'équilibre qui peut aussi s'écrire:

$$h^3_{ij} N_{ij} - h_{j3k} w_{ij} M_{ik} = 0$$

La symétrie des N_{ij} et des M_{ij} implique: $h_{ij} N_{ij} = h_{ij} N_{ij} = 0$, et le tenseur N_{ij} étant symétrique, cette équation est une identité; avec les approximations que nous avons faites, il en est de même (?) si l'on remarque que par exemple $h_{j3k} w_{ij} M_{ik}$ est négligeable devant $h^3_{ij} N_{ij}$.

Les équations générales des coques sont donc les suivantes:

EQUATIONS D'EQUILIBRE:

$$\begin{aligned} \sum_j N_{ij} + w_j^i Q^i + F^i &= 0 & 2 \text{ équations} \\ \sum_i Q^i - w_{ij} N_{ij} + P &= 0 & 1 \text{ équation} \\ \sum_j M_{ij} + Q^i &= 0 & 2 \text{ équations} \end{aligned}$$

RELATIONS CONTRAINTES / DEPLACEMENTS:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= E h / (1 - \nu^2) \quad C_{ijkl} \left[\sum_k V_m + W_{km} W \right] & 3 \text{ équations} \\ M_{ij} &= -E h / 12 (1 - \nu^2) \quad C_{ijkl} \left[\sum_k \sum_m W \right] & 3 \text{ équations} \end{aligned}$$

avec $C_{ijkl} = 1/2 \left[g_{ir} g_{js} + g_{is} g_{kr} + \nu (h_{ir} h_{js} + h_{is} h_{jr}) \right]$ et $i, j = 1, 2$
 et $N_{ij} = N_{ji}$
 $M_{ij} = M_{ji}$

Si les conditions aux limites sont satisfaites, ces 11 équations sont suffisantes pour déterminer les 3 N_{ij} , les 3 M_{ij} , les 2 Q^i , les 2 V_j et le W soit 11 inconnues.

B REFLEXIONS SUR LES EQUATIONS DES VOILES MINCES

Nous nous proposons de définir le problème mathématique, d'en donner quelques formes transformées, d'étudier la possibilité d'introduire une fonction de force, d'en donner la solution dans des cas particuliers.

01 DEFINITION DU PROBLEME

Une surface de l'espace euclidien étant définie par ses formes fondamentales g_{ij} et w_{ij} , formes reliées par les formules de Gauss-Codazzi, déterminer le tenseur

symétrique N_{ij} satisfaisant aux équations
$$\nabla_j N_{ij} + F_i = 0 \quad 1)$$

$$- w_{ij} N_{ij} + P = 0 \quad 2)$$

et aux conditions aux limites
$$n(0)_{ij} N(0)_{ij} + F(0)_i = 0 \quad 3)$$

où $n(0)_{ij}$ sont les composantes covariantes du vecteur unitaire normal à la ligne limitant la surface, orienté vers l'extérieur et $F(0)_i$ la force extérieure appliquée par unité de longueur.

Nous voyons très nettement la dissymétrie qui existe entre le système de deux équations 1) et la troisième équation 2). Les deux premières ne mettent en jeu que le premier des deux champs tensoriels caractérisant S à savoir les g_{ij} . La troisième ne met en jeu que le second champ tensoriel w_{ij} . Cette dernière équation contient les composantes du tenseur des tensions sous forme finie tandis que les deux premières font intervenir les dérivées premières de ces mêmes composantes.

Ces deux équations considérées sans la troisième forment un système différentiel dans une variété riemannienne; la troisième "ferme" le système en exprimant que cette variété est plongée dans l'espace ambiant euclidien. Il est intéressant de voir sur cet exemple l'intérêt pratique des recherches effectuées en mathématiques sur les équations aux dérivées partielles dans des variétés non euclidiennes. Le formalisme tensoriel permet ainsi de rattacher le problème des voiles minces aux problèmes de base bien connus de la physique mathématique.

Remarque: considérons le problème du voile mince dans le sens inverse. Dans les premières équations, nous pouvons constater une dualité entre les g_{ij} et les N_{ij} , et dans la dernière une dualité entre les w_{ij} et les N_{ij} .

Dans le voile mince, si l'on considère la surface comme une donnée, on obtient certaines conditions de rive nécessaires. Si au contraire on se donne l'état de tension arbitrairement, on obtient les conditions pour les g_{ij} et les w_{ij} , c'est à dire pour la forme de la surface. On détermine ainsi la surface à partir de l'état de charge et des contraintes qu'on accepte dans le voile: c'est le problème funiculaire généralisé.

Les inconnues principales sont g_{ij} , les données sont les T_{ij} . C'est le problème posé en relativité générale où il s'agit de déterminer la forme (courbure) de l'espace en fonction du tenseur énergie-impulsion.

02 PREMIERE TRANSFORMATION DES EQUATIONS

Explicitons et simplifions les deux premières équations:

$$\nabla_j N^{ij} + F^i = 0$$

$$\partial_j N^{ij} + G^i_k N^{kj} + G^j_k N^{ik} + F^i = 0$$

En multipliant par $\div g$ et en remarquant que:

$$G^j_k = 1/\div g \partial_k \div g \text{ et que } \partial_j (\div g) = 0, \text{ il vient:}$$

$$\partial_j (\div g N^{ij}) + G^i_k N^{kj} \div g + \div g F^i = 0$$

et en posant $A^{ij} = \div g N^{ij}$ et $F = \div g F^i$, densités tensorielles, on obtient le système équivalent:

$$\partial_j A^{ij} + G^i_k A^{kj} + F^i = 0$$

$$-w_{ij} A^{ij} + F^3 = 0$$

Application au cas de la sphère: on a déjà calculé les expressions suivantes:

$$g_{11} = r^2 \quad g_{22} = r^2 \sin^2 q \quad g_{12} = g^{12} = 0$$

$$g^{11} = 1/r^2 \quad g^{22} = 1/r^2 \sin^2 q \quad \div g = \div g_{11} g_{22} = r^2 \sin q$$

$$G_2^{12} = -\sin q \cos q \quad G_1^{22} = G_2^{21} = \cot q$$

$$w_{11} = r \quad w_{22} = r \sin^2 q \quad w_1^1 = 1/r \quad w_2^2 = 1/r$$

$$R_{12,12} = r^2 \sin^2 q \quad R_{11} = -1 \quad R_{22} = -\sin^2 q$$

$$R = -2/r^2 \quad K = 1/r^2$$

Le système d'équations se développe donc ainsi:

$$\partial_1 A^{11} + \partial_2 A^{12} + G_1^{11} A^{11} + G_1^{12} A^{21} + G_2^{11} A^{12} + G_2^{12} A^{22} + F^1 = 0$$

$$\partial_1 A^{21} + \partial_2 A^{22} + G_1^{21} A^{11} + G_1^{22} A^{21} + G_2^{21} A^{12} + G_2^{22} A^{22} + F^2 = 0$$

$$-w_{11} A^{11} - w_{22} A^{22} + F^3 = 0$$

soit $\partial_1 A^{11} + \partial_2 A^{12} + G_2^{12} A^{22} + F^1 = 0$

$$\partial_1 A^{21} + \partial_2 A^{22} + G_1^{22} A^{21} + G_2^{21} A^{12} + F^2 = 0$$

$$-w_{11} A^{11} - w_{22} A^{22} + F^3 = 0$$

soit $\partial_q A^{qq} + \partial_j A^{qj} - \sin q \cos q A^{jj} + F^q = 0$

$$\partial_q A^{jq} + \partial_j A^{jj} + 2 \cot q A^{jq} + F^j = 0$$

$$-r A^{qq} - r \sin^2 q A^{jj} + P = 0$$

Exprimant A^{qq} en fonction de A^{jj} : $A^{qq} = P/r - \sin^2 q A^{jj}$ il vient:

$$\partial_q (P/r - \sin^2 q A^{jj}) + \partial_j A^{jq} - \sin q \cos q A^{jj} + F^q$$

$$1/r \partial_q P - 2 \sin^2 q \cos q A^{jj} - \sin^2 q \partial_q A^{jj} + \partial_j A^{jq} - \sin q \cos q A^{jj} + F^q$$

$$=$$

$$- \sin^2 q \partial_q A^{jj} + \partial_j A^{jq} - (2 \sin q + 1) \sin q \cos q A^{jj} + (1/r \partial_q P + F^q) = 0$$

et $\partial_j A^{jj} + \partial_q A^{jq} + 2 \cot q A^{jq} + F^j = 0$

Supposons que $F^q = 0$, $F^j = 0$, $P = p$ (pression constante), $A^{jq} = 0$ et il vient

$$\partial_q A^{jj} + (2 \sin q + 1) \cot q A^{jj} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_j A^{jj} = 0$$

ce qui signifie que A^{jj} est une fonction de q seulement soit:

à suivre...

03 DEUXIEME TRANSFORMATION DES EQUATIONS

Supposons que les asymptotiques de la surface soient réelles et prenons les comme lignes de coordonnées. La troisième équation se transforme alors en:

$$2 w_{12} A^{12} = F^3$$

et les deux premières équations se mettent sous la forme:

$$\partial_1 A^{11} + G_1^{11} A^{11} + G_2^{12} A^{22} = K^1$$

$$\partial_2 A^{22} + G_1^{21} A^{22} + G_2^{22} A^{22} = K^2$$

avec $K^1 = -F^1 - \partial_2 k + G_1^{12} k$

$$K^2 = -F^2 - \partial_1 k + G_1^{12} k \quad \text{où } k = F^3 / 2 w_{12}$$

On peut alors séparer A^{11} et A^{22} en dérivant par exemple la première équation par rapport à x^2 et en éliminant A^{22} .

Il vient deux équations en A^{11} et A^{22} , par exemple:

$$\begin{aligned} & \partial_2^2 A^{11} (\partial_2 \text{Log}(G_2^{12}) - G_2^{12}) + \partial_2 A^{11} G_1^{11} \\ & + A^{11} (\partial_2 G_1^{11} - \partial_2 \text{Log}(G_2^{12}) + G_2^{22} G_1^{11} - G_1^{21} G_2^{12}) \\ & = G_2^{12} \partial_2 K^1 - G_2^{12} K^2 - (\partial_2 \text{Log}(G_2^{12}) - G_2^{22}) \end{aligned}$$

Cette équation se présente sous la forme canonique de l'équation hyperbolique de Laplace, et on en déduit que les asymptotiques de la surface d'un voile mince sont les caractéristiques du système d'équations aux dérivées partielles. On peut alors développer des méthodes analytiques pour résoudre ce système. La méthode d'intégration de Riemann est systématiquement applicable à la résolution du problème quand les conditions aux limites sont convenables: on introduit ainsi une forme différentielle adjointe à la forme représentée par l'équation canonique qui permet, par l'application de la formule de Green et l'introduction d'une fonction de "Riemann", de ramener le problème à des quadratures suivant les caractéristiques.

Par exemple, dans le cas de surfaces minima, les deux premières équations s'écrivent dans les coordonnées asymptotiques:

$$\partial_1 A^{11} + \partial_1 (\text{Log} \div g_{11}) A^{11} + (\text{Log} \div g_{22}) A^{22} = K^1$$

$$\partial_2 A^{22} + \partial_2 (\text{Log} \div g_{22}) A^{22} + (\text{Log} \div g_{11}) A^{11} = K^1$$

Elles s'intègrent immédiatement dans le cas $g_{11} = f(x^2)$ et $g_{22} = f(x^1)$ qui correspond à l'hélicoïde droit à plan directeur qui est la seule surface minima réglée.

Dans le cas où les asymptotiques sont imaginaires, on peut développer encore une méthode analogue. Mais il est difficile de dégager les conditions d'analyticité qui permettent de définir des solutions. Le cas des asymptotiques réelles correspond aux surfaces à courbure totale négative.

Pour les conditions aux limites on doit distinguer les deux cas des courbures totales positives et négatives. Dans le cas positif, le problème est déterminé par une relation de bordure entre les composantes normale et tangentielle des réactions.

Dans le cas négatif on peut, sur une certaine partie de la bordure, imposer des réactions nulles et, sur une autre partie, des réactions quelconques, mais il subsiste une partie du contour où la relation entre les composantes des réactions n'est pas libre. Dans tous les cas, il se peut que les conditions aux limites imposées ne conviennent pas. Il est nécessaire alors d'ajouter au système la condition du minimum de l'énergie potentielle de la surface. Ce problème important n'a pas été abordé ici.

04 TROISIEME TRANSFORMATION DES EQUATIONS

On peut retrouver les équations habituelles des coques en projection sur des axes fixes.

Soit α un vecteur unitaire de direction fixe dans l'espace euclidien. Soit a^i ses composantes dans le repère mobile e_j attaché à la surface au point P.

Le vecteur α étant constant, sa dérivé covariante est nulle :

$$\nabla_i a_j = 0$$

relation exprimée dans S2 par:

$$a) \quad \nabla_j a_j + w_{ij} a_j = 0$$

$$b) \quad \partial_i a_j - w_{ij} a_j = 0$$

Développons le produit scalaire (invariant) $a_i (\nabla_j N^{ij} + F^i) = 0$:

$$\nabla_j (a_i N^{ij}) - N^{ij} \nabla_j a_i + a_i F^i = 0, \text{ soit d'après a):}$$

$$\nabla_j (a_i N^{ij}) + N^{ij} a_j w_{ij} + a_i F^i = 0, \quad \text{soit d'après 2)}$$

$$\nabla_j (a_i N^{ij}) + a_j P + a_i F^i = 0, \text{ qui peut s'écrire:}$$

$$\nabla_j (a_i N^{ij}) - \alpha \cdot F = 0$$

On sait que lorsque v^i est une densité tensorielle $\nabla_j (v^j) = 1/\sqrt{g} \partial_j (v^j)$; on est donc conduit à introduire les densités tensorielles $A^{ij} = \sqrt{g} N^{ij}$ et $F = \sqrt{g} F^i$, il vient:

$$\partial_j (a_i A^{ij}) + \sqrt{g} \cdot \alpha \cdot F = 0$$

Si α est l'un des vecteurs de base i, j, k , on obtient ainsi les deux premières équations classiques en projection sur les axes fixes.

$$\partial_1 N^1_1 + \partial_2 N^2_1 + q_1 = 0$$

$$\partial_1 N^1_2 + \partial_2 N^2_2 + q_2 = 0$$

05 PROBLEME DE LA FONCTION DE FORCE

On garde au problème toute sa symétrie si l'on peut résoudre d'abord les deux premières équations en exprimant les N^{ij} en fonction d'une fonction F qui sera déterminée par la troisième équation quand on y portera les $N^{ij}(F)$. Il semble intéressant de chercher l'expression des N^{ij} sous la forme de dérivées secondes de F . En portant ces valeurs dans la troisième équation on aurait alors à résoudre une

équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre à coefficients non constants qu'on sait étudier sinon intégrer.

On va utiliser les relations $e_{ij} = 1/g \ e_j$, les propriétés d'antisymétrie du tenseur $R_{st,12}$ ce qui permet de l'écrire est $R_{12,12}$, et le fait qu'en contractant le tenseur $R_{ij,kl}$ pour arriver à la courbure scalaire, on obtient $R = 2 g R_{12,12}$, sachant que toutes les composantes non nulles de $R_{ij,kl}$ s'expriment en fonction de cette seule valeur.

Soit la forme :

$$\begin{aligned}
 N_{ij} &= h^{is} h_{jr} \rightarrow \rightarrow_s F \\
 \rightarrow_j N_{ij} &= \rightarrow_j h^{is} h_{jr} \rightarrow \rightarrow_s F \\
 &\quad h^{is} h_{jr} \rightarrow_j \rightarrow \rightarrow_s F \\
 &\quad \div g e^{is} \div g e_{jr} \rightarrow_j \rightarrow \rightarrow_s F \\
 &\quad g e^{is} (e_{jr} \rightarrow_j \rightarrow) \rightarrow_s F \\
 &\quad g e^{is} (\rightarrow_1 \rightarrow_2 - \rightarrow_2 \rightarrow_1) g_{is} \rightarrow_i F \\
 &\quad g e^{is} g_{is} (\rightarrow_1 \rightarrow_2 - \rightarrow_2 \rightarrow_1) \rightarrow_i F \\
 &\quad g e^{is} g_{is} R_{t,12} \rightarrow_t F \\
 &\quad g e^{is} R_{st,12} \rightarrow_t F \\
 &\quad e^{is} e_{st} R_{12,12} \rightarrow_t F \\
 &\quad 1/g e_{s est} R_{12,12} \rightarrow_t F \\
 &\quad 2/g R_{12,12} \rightarrow_i F
 \end{aligned}$$

et enfin

$$\rightarrow_j N_{ij} = R \rightarrow_i F$$

On est conduit aux remarques suivantes:

1) Nous nous apercevons ainsi que cette solution ne convient pas dans le cas d'une surface non déveoppable, c'est à dire à courbure scalaire non nulle.

2) Cette solution convient par contre en élasticité plane dans le cas où le problème doit être traité en coordonnées curvilignes quelconques (adaptées à un cas de charge particulier ou à des conditions aux limites données sur une courbe limitante non simple.

3) Cette solution convient dans le cas des coques surbaissées où l'on peut négliger R (mais pas les w_{ij} qui sont des termes en L^{-1} alors que R est en L^{-2}).

4) Cette solution convient, légèrement transformée, au cas des voiles à cour-

bure constante ou, de façon approximative, au cas des voiles à courbure totale presque constante. En effet, remarquons que F étant une fonction, la dérivée covariante $\nabla_i F$ se réduit à $\partial_i F$. Ecrivons alors:

$$\begin{aligned} R \nabla_i F &= R g^{ij} \nabla_j F = R g^{ij} \partial_j F \\ &= g^{ij} \partial_j R F - g^{ij} F \partial_j R \\ &= g^{ij} \partial_j R F - F \partial_i R \end{aligned}$$

En posant $N_{ij} = h^{is} h_{jr} \nabla_r F - g^{ij} R F$, on obtient les relations:

$$\nabla_j N^{ij} = F \nabla_i R$$

Si R est constant on peut alors écrire:

$$\nabla_j N^{ij} = 0 \text{ avec } N_{ij} = h^{is} h_{jr} \nabla_r F - g^{ij} R F \text{ et } R \text{ constant.}$$

Remarque: en prenant pour cas particulier de l'expression ci-dessus $F = R$, le tenseur $G_{ij} = N_{ij} = h^{is} h_{jr} \nabla_r R - g^{ij} R^2$ satisfait, pour R constant, à:

$$\nabla_j G^{ij} = 0.$$

Il pourrait être utile de rapprocher ce résultat du théorème suivant: La divergence du tenseur d'Einstein $S_{ij} = R_{ij} - 1/2 g_{ij} R$ est identiquement nulle. Il s'agit là d'une expression contenant les dérivées partielles du second ordre des g_{ij} alors que nous voyons apparaître dans le tenseur G_{ij} des dérivées partielles du quatrième ordre des g_{ij} de la surface. Quelle peut être la signification physique de ce tenseur ?

En revenant à la précédente expression de N_{ij} , il convient de la compléter avec un terme permettant d'annuler identiquement l'expression $\nabla_j N^{ij} + F^i = 0$.

Il suffit d'ajouter un terme $h^{is} h_{jr} \nabla_r B_s$ tel que

$$\nabla_j h^{is} h_{jr} \nabla_r B_s = R B_i = F^i.$$

On obtient alors la forme: $N_{ij} = h^{is} h_{jr} \nabla_r [-\nabla_s F - 1/R F_s] - g^{ij} R F$

qu'on porte enfin dans la troisième équation - $w_{ij} N^{ij} + P = 0$ et on obtient une équation de la forme:

$$w_{ij} \partial^2_{ij} F + b^k \partial_k F + c P = 0,$$

dont l'équation caractéristique est de la forme: $w_{ij} du^i du^j = 0$.

A coté des méthodes classiques d'étude de ce type d'équations aux dérivées partielles, linéaire, du second ordre à coefficients non constants, signalons la méthode de Johansen trouvée dans l'Hermite.

Remarque sur les coques:

Il est possible de trouver des formes particulières pour les N_{ij} , M_{ij} , Q_i intervenant dans les équations d'équilibre des coques telles que les équations **homogènes** soient automatiquement vérifiées. Nous donnons les expressions suivantes:

- 1) En fonction d'un vecteur $\mathbf{B}$:

$$N = h h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

$$M = h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

$$Q = R \mathbf{B}$$
- 2) En fonction d'un scalaire A :

$$N = h w \nabla A$$

$$M = -g \nabla A$$

$$Q = h \nabla A$$

Mais on ne peut pas former une solution complète du problème par une combinaison de ces solutions particulières.

06 DISCUSSION SUR LA DIVERGENCE D'UN TENSEUR $\nabla_j T_{ij} = 0$

Dans le cas où T_{ij} est un tenseur antisymétrique la solution du problème de la divergence nulle est

$$T_{ij} = \epsilon_{kmn} \nabla_k u^m$$

où ϵ_{kmn} est le tenseur de Ricci et u^m un vecteur quelconque.

Mais on ne peut rien dire dans le cas d'un tenseur symétrique. Dans le cas d'un espace euclidien, on peut ramener le problème à $\partial_j T_{ij}$ et dans ce cas T_{ij} est de la forme $\partial_j F_{ij}$ où $F_{ij} = -F_{ji}$. On se sert de cette propriété en élasticité tridimensionnelle quand on exprime les contraintes en fonction des fonctions de Maxwell par exemple et en élasticité plane quand on les exprime en fonction de la fonction de force.

La difficulté dans le problème des voiles vient du fait qu'en ramenant le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel, on est passé d'une variété euclidienne à une variété riemannienne et qu'il n'est pas possible en général de trouver un changement de coordonnées permettant de passer de la forme $\nabla_j T_{ij}$ à la forme $\partial_j T_{ij}$. On peut développer une surface sur un plan le long d'une ligne mais pas le long de deux (une surface n'est pas en général développable). Il est possible de trouver localement un système de coordonnées géodésiques dans lequel les symboles de Christoffel s'annulent mais il n'est pas possible en général de l'étendre à toute la surface.

Le problème qui nous préoccupe peut être rapproché de certains problèmes de la Relativité Générale et les méthodes utilisées dans ce domaine pourraient certainement lui être appliquées. On remarquera que le problème du champ faible est à rapprocher du problème de la coque surbaissée et que le problème à symétrie sphérique qui admet la solution rigoureuse de Shwartzschild est à rapprocher de celui de

la coque sphérique qui admet une fonction de force rigoureuse.

07 CONCLUSION

Considérons une relation donnée dans une variété S^n , par exemple $R_3 = 0$ dans S^3 qui exprime que S^3 est euclidien ($R^i_{j,k} = 0$). Passons de S^3 à une sous-variété quelconque, par exemple une surface S^2 . La relation $R_3 = 0$ se décompose en relations de la forme $R_3 = R_2 + w_2^3 = 0$ soit $R_2 = -w_2^3$ où R_2 est le $R^i_{j,k}$ de S^2 . En écrivant simplement que S^2 est plongé dans S^3 , on a fait ainsi apparaître dans S^2 certaines propriétés.

Dans le problème des voiles on est parti du système

$$\sum_j T_{ij} + f_i = 0 \text{ écrit dans } S^3 \text{ (i,j=1,2,3)}$$

et on est arrivé à un système analogue écrit dans S^2 , et au produit de décomposition

$-w_{ij} T_{ij} + f^3 = 0$, cette dernière équation indiquant le fait que la surface est plongée dans notre espace euclidien (l'analogue des relations de Gauss-Codazzi de la théorie des surfaces).

On peut avoir le point de vue heuristique suivant: soit une variété S_n dans laquelle on étudie un système d'équations $R_n = a_n$. Peut-on définir une variété S^{n+1} dans laquelle un système $R_{n+1} = 0$ aurait pour produit de décomposition

$R_n = a_n^{n+1}$ dans le passage $S^{n+1} \rightarrow S^n$. C'est le point de vue systématiquement utilisé dans les domaines des théories relativistes.

C'est ce point de vue qui nous a séduit dans l'article de Prunieras Chevallier et que nous avons tenté de bien assimiler, de présenter et de commenter dans cette étude faite pendant l'année universitaire 1968 / 1969.

BIBLIOGRAPHIE

- 00 Monsieur Tompkins au pays des merveilles, Gamow
- 01 Formes structurales de l'architecture moderne, Curt Siegel, Eyrolles
- 02 L'analyse de la matière, B. Russel, ?
- 03 Physique mathématique classique, Théodore Vogel, A. Colin
- 04 Eléments de Calcul Tensoriel, A. Lichnerowicz, A. Colin
- 05 Géométrie Différentielle, J. Lelong-Ferrand, Masson
- 06 Algèbre et analyse linéaires, A. Lichnerowicz, Masson
- 07 Equations aux dérivées partielles, CNRS, fasc VII
- 08 Algèbre et analyse tensorielle, CNRS, fasc IV
- 09 Les tenseurs en mécanique et en élasticité, L. Brillouin, Masson
- 10 Géométrie des espaces de Riemann, E. Cartan, Gauthier-Villars
- 11 Principes de la théorie électromagnétique et de la relativité,
MA. Tonnelat, Masson
- 12 Relativité générale, JE. Charon, Kister Genève
- 13 Théorie du champ, Landau et Lifchitz, Mir Moscou
- 14 Théorie de l'élasticité, Landau et Lifchitz, Mir Moscou
- 15 Mécanique des fluides, Landau et Lifchitz, Mir Moscou
- 16 Mathematical theory of elasticity, AE. Love, NY Dover publications
- 17 Résistance des matériaux vol I, l'Hermite, Dunod
- 18 Théorie de l'élasticité, Timoschenko, ?
- 19 Cours de RDM de l'ECL, Prunier, photocopié
- 20 Statique et dynamique des coques, W Flügge, Eyrolles
- 21 Théorie des plaques et des coques, Timoschenko, ?
- 22 Application des équations aux différences finies aux coques,
M. Soare, Eyrolles
- 23 Calcul à la flexion des coques coniques, à épaisseur constante,
charges axisymétriques, Casacci-Bosc, Dunod
- 24 The finite element method in structural and continuum mechanics,
Zienkiewicz, Mc-Graw Hill
- 25 RDM des récipients sous pression, G Dreyfus, Ed. Techniques
- 26 Voiles minces sans flexion, conditions aux limites,
Kashani-Sabet, Annales des Ponts 1967-I
- 27 Reflexions préliminaires sur l'emploi de la notion de tenseur dans la théorie
des voiles, J. Prunieras-D. Chevallier, Annales des Ponts 1965-V
- 28 Géométrie différentielle du milieu continu matériel, Y. Baumberger,
JP. Bourguignon, J. Roudier, Annales des Ponts et Chaussées 1968-V
- 29 Flambement et vibration des structures, Ferrandon, Annales / Ponts 1968-VIII
- 30 Riemannian Differential geometry, Eisenhart, ?
- 31 Theoretical elasticity, Green and Zerna, Oxford University Press 1968
- 32 Large elastic deformations, Green and Zerna, Oxford University Press 1968
- 33 Tensor Calculus, Barry Spain, University Mathematical Texts, Oliver & Boyd
- 34 Les voiles minces en béton armé, A. Paduart, Eyrolles
- 35 Le voile autoportant, P. Conil, Eyrolles
- 36 Géométrie différentielle et systèmes extérieurs, Choquet-Bruhat, Dunod

--