formes pascaliennes

par Alain Marty

Toute une famille de courbes, de surfaces et de volumes peut s'élaborer à partir de la simple itération du procédé consistant à déterminer le milieu de deux points. Voyage au pays de ces formes utiles à l'architecte et riche de beautés géométriques.

introduction

On peut tenter l'étude des courbes et des surfaces en lisant les oeuvres des grands classiques de la géométrie différentielle dont Gauss et Riemann sont les vedettes incontestées. Mais que faire avec une craie sur un tableau ou une corde et des piquets sur un chantier, des symboles de Christophel, des trièdres de Serret-Frenet ou des belles formules de Levi-Civita ?

On peut se satisfaire des superbes outils informatiques dont les puissants interfaces graphiques nous permettent de dessiner tout ce que l'on veut, des tores, des courbes de Bézier, des splines, des NURBS, des carreaux de Coons, des tubages complexes,... Mais les algorithmes restant pour la plupart cachés et la littérature sur le sujet se révélant assez touffue, que peut-on vraiment extraire de toute cette pratique qui nous permette de comprendre ce qui se passe au fond et la vraie nature d'une courbe ou d'une surface ?

L'approche par les *Formes Pascaliennes* est une tentative vers une géométrie descriptive des formes gauches, une tentative de passage des formules différentielles de GAUSS/RIEMMANN à un ensemble réduit d'opérations simples, une sorte d'algorithme de DE CASTELJAU généralisé, où l'on retrouve les vertus du dessin "à main levée", à l'aide d'une simple corde sur le tableau ou le placo du chantier...

approche progressive

Les formes pascaliennes sont une construction unitaire et progressive d'une famille de formes gauches, sur la base de l'application récursive d'un seul opérateur retournant la *forme milieu* de deux autres formes, à commencer par l'opérateur retournant le milieu de deux points.

Construction d'un segment

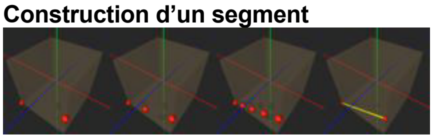

fig.1

Tendons une simple corde entre deux points (p0, p1) de l'espace et replions-la en droite ligne jusqu'à faire coïncider les deux bouts ; le pli de la corde marque le milieu des deux points, pM = (p0+p1)/2. Maintenant que nous savons trouver le milieu de deux points, répétons récursivement cette manipulation à droite et à gauche pour trouver successivement les points au 1/4 et au 3/4, puis au 1/8 et suivants, au 1/16 et suivants, jusqu'à obtenir une suite infinie et continue de points distribués sur la droite portée par les deux points, ensemble de points qu'on appellera un segment et que l'on notera pL2 (des explications sur cette notation seront données un peu plus loin).

Construction d'une facette gauche

fig. 2

Nous allons répéter cette opération en utilisant maintenant deux segments, en construisant un segment milieu sur les deux points milieux des deux segments initiaux, et en répétant récursivement cette opération. Nous obtenons une série infinie et continue de segments formant une surface, une forme en selle de cheval connue sous le nom de paraboloïde hyperbolique que l'on appellera plus simplement facette gauche et que nous noterons pS22.

Construction d'un cube gauche

fig. 3

Avec deux facettes gauches, nous construirons de même un empilement de facettes formant un volume plein, un cube gauche noté pV222, avec deux cubes gauches on pourra de même engendrer un hypervolume (pH2222), et ainsi de suite si on le désire, pour former une première famille de formes appelées *formes multilinéaires récursives*. Notons que ces formes sont “pleines”, un cube gauche est bien un volume rempli de points et non une enveloppe formée de 6 faces, 12 arêtes et 8 points, et on va pouvoir “tailler” dedans...

Construction d'une parabole

fig. 4

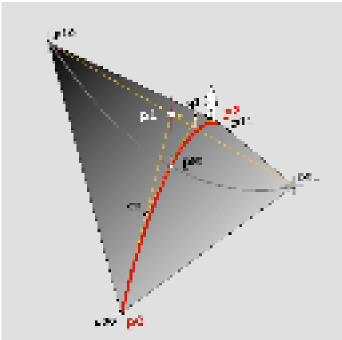

fig. 5

En partageant une facette gauche en 4 sous-facettes égales et en recommençant récursivement l'opération sur une diagonale, on peut faire apparaître une suite infinie et continue de points formant une courbe diagonale. On aurait pu également obtenir cette courbe en repliant la facette gauche jusqu'à faire coïncider deux sommets opposés, révélant un triangle possédant un coté curviligne, mais nous choisirons une autre approche plus pratique et plus riche en développements. En notant p0 et p2 les deux sommets de la facette où aboutit la diagonale, p1 le milieu des deux autres sommets, on construit q0 le milieu de p0p1, q1 le point milieu de p1p2 et pM le milieu de q0q1 ; ce point qui peut s'écrire sous la forme: pM = (p0+2p1+p2)/4 est le milieu de la courbe diagonale, et une application récursive en deux temps de cette opération en reconstruit tous les points. Cette courbe définie par trois points (p0,p1,p2) est une *parabole*, notée pL3, et la construction utilisée est un exemple d'application d'un algorithme dû à de Casteljau (1954), que nous allons utiliser systématiquement et étendre à toute une famille de formes.

Construction d'un paraboloïde réglé

fig. 6

En construisant la parabole milieu de deux paraboles sur les milieux des trois couples de points les définissant, et en recommençant récursivement cette opération, nous obtenons une surface appelée paraboloïde réglé et notée pS23 (contrôlée par 2x3=6 points), surface que nous pourrions obtenir de même à partir des trois segments définis sur les trois couples de points contrôlant les deux paraboles. Le point milieu s'exprime sous la forme pM = (p0+3p1+3p1+p3)/8 - les quatre points (p0,p1,p2,p3) étant des combinaisons linéaires des points de contrôle des paraboles - et une récursion en trois temps conduit à une courbe contrôlée par ces quatre points, appelée *cubique* et notée pL4.

Construction d'une biquadrique

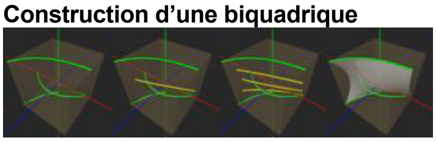

fig. 7

Avec trois paraboles nous obtiendrons une surface appelée *biquadrique* notée pS33, dont le point milieu s'exprime sous la forme pM = (p0+4p1+6p2+4p3+p4)/16 et dont la diagonale est une courbe contrôlée par cinq points et notée pL5.

Définition des formes pascaliennes

Nous pouvons ainsi construire toute une famille de pCourbes, de pSurfaces, de pVolumes,... dont les pFormes milieux sont des combinaisons linéaires à coefficients binomiaux (triangle de Pascal), d'où le nom *formes pascaliennes* proposé pour cette famille de formes.

Construction d'un segment immergé

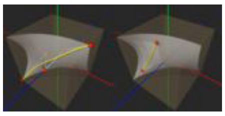

fig. 8

Considérons maintenant deux points quelconques d'une pSurface. Ces deux points déterminent une et une seule sous-surface de même type conduisant à une diagonale unique que nous appellerons "segment immergé" dans la pSurface ou iSegment de la pSurface et que nous noterons ipL2. Nous avons ainsi étendu le concept de segment rectiligne de l'espace à celui de segment immergé courbe dans une pSurface et nous savons déjà qu'un iSegment d'une facette gauche (pS22) est en fait une parabole de l'espace, et qu'un iSegment d'une biquadrique (pS33) est une courbe contrôlée par 5 points (pL5), etc...

Construction d'une courbe immergée

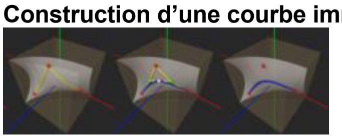

fig. 9

Trois points d'une biquadrique (pS33) permettent de construire une parabole immergée (ipL3) et l'on démontre qu'il s'agit d'une pCourbe contrôlée par 9 points de l'espace (pL9). De façon générale, une pCourbe (pLq) immergée dans une pSurface (pSmn) est une pCourbe de l'espace (pLN) telle que:

N = (m+n-2)*(q-1)+1

ce résultat se généralisant sans difficulté à des pFormes de dimensions quelconques (pVolumes, pHypervolumes,...).

applications

L'approche par les formes pascaliennes permet de définir de façon unitaire et de manipuler de façon simple toute une famille de formes géométriques classiques. On ne mentionnera ici qu'une application à la génération des *formes rationnelles* qui conduisent notamment aux coniques et aux formes de révolution, et une application à la maîtrise des formes gauches dans le domaine de *l'architecture*.

Génération des formes rationnelles

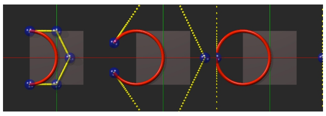

fig. 10

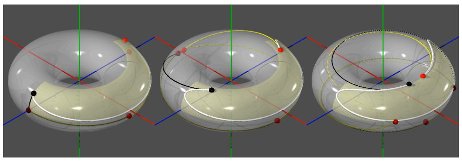

fig. 11

Aucune hypothèse n'a été faite sur la dimension de l'espace *courant* dans lequel on définissait les points, et rien n'empèche donc de travailler dans un espace à quatre dimensions (noté R4), - à part le fait qu'il n'est pas facile de tendre une corde entre deux points d'un espace quadridimensionnel !! Toute une famille de formes appartenant à notre espace (R3) peut être considérée comme engendrée par la projection de pFormes construites dans R4, à commencer par les coniques. On sait en effet que l'intersection par un plan d'un cône à base circulaire produit un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant son inclinaison. Un arc de cercle peut donc en particulier être vu comme projection sur un plan (R2) d'une parabole de l'espace (R3), et en montant d'une dimension, un arc de cercle de l'espace (R3) peut être vu comme projection dans l'espace courant d'une parabole (pL3) définie dans R4.

On a ainsi accès à toute une famille de formes connues sous le nom de formes rationnelles: on connait les NURBS en CAO, mais plus près de nous on retrouve les surfaces de révolution et en particulier les cylindres, cônes, sphères et tores qu'il est possible d'engendrer à partir d'une simple biquadrique (pS33) *correctement* définie dans R4.

On notera qu'un arc de cercle n'est pas limité à la projection conique d'une parabole (pL3) ; le demi-cercle base d'un cône construit à l'aide d'une biquadrique (pS33) peut en effet être vu comme projection de sa diagonale, dont nous savons qu'elle est une courbe à 5 points de contrôle (pL5) ; en étandant l'intervalle de définition de [0,1] à [-k,1+k] avec k = sqrt(2)/2, on construit le cercle complet. Les figures ci-dessus illustrent trois étapes de cette progression et montrent que deux des points de contrôle sont envoyés à l'infini... En immergeant l'arc de cercle dans une sphère ou dans un tore, le polygone curviligne et les cinq points de contrôle restent à distance finie. Immerger une forme dans une autre peut permettre de les confiner dans un espace fini et de les analyser plus facilement. On pense aux représentations du plan projectif par la sphère de Riemann et pourquoi pas à la représentation de certaines hypothèses cosmologiques en physique mathématique.

Formes Pascaliennes et Architecture

Les architectes romans et gothiques connaissaient parfaitement les propriétés structurales optimales de l'arc de chaînette et pourtant ils ne l'utilisaient pas dans la construction des voutes. Cela rendait trop complexe le tracé des innombrables croisées de voutes et autres intersections induites par des plans en croix compliqués par les nombreux bas-cotés et percements de tous types, et impossible la transmission des principes générateurs de ce tracé à des maîtres-constructeurs intervenant alors en véritables créateurs et non en simple exécutants servils. Ces architectes approchaient donc l'arc de chaînette par des arcs de cercle plus faciles à construire et à composer à l'aide de simples cordes, passant du plein cintre à l'arc brisé afin de créer des croisées d'ogives destinées à alléger et à ouvrir les murs porteurs, sans jamais perdre les acquis des techniques de mise en oeuvre issues du passé.

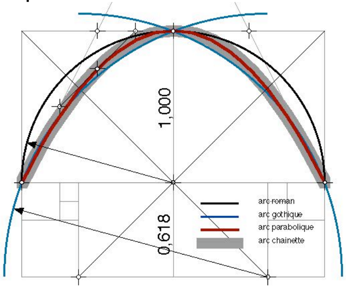

fig. 12

L'architecte catalan Gaudi avait rêvé de s'en évader, il avait tort ! Faisant table rase des acquis des architectures romane et gothique, il créa un langage architectural très personnel et assez obscur qu'il utilisa sa vie durant pour construire d'étonnants bâtiments. Mais à la disparition de Gaudi au début du XXème Siècle, la construction de la Sagrada Familia qu'il venait d'entreprendre s'arrêta net, faute d'argent bien sûr, mais plus profondément faute d'un "langage simple" partagé par ceux qui devaient poursuivre l'oeuvre, et il aura fallu attendre ces vingt dernières années pour voir enfin la construction reprendre. Les arcs chaînettes à la base des formes des poteaux, des planchers et des articulations organiques imaginées par Gaudi, formes impossibles à tracer facilement et donc à transmettre, ont donc été remplacés par des arcs de parabole et des portions de paraboloïdes hyperboliques, toutes formes traçables *in fine* à l'aide d'une simple corde et des divisions successives par deux. Les architectes ont simplement décidé de réduire le problème pour mieux le maîtriser, comme l'avaient fait avant eux les maîtres d'oeuvre romans et gothiques.

fig. 13

L'architecte pourra trouver dans les formes pascaliennes une approche simple de formes gauches allant bien au delà des paraboles et des PH, tout en restant loin de toute formalisation abstraite, basée sur des gestes élémentaires compréhensibles et transmissibles. Cette approche propose les bases d'un langage pour la conception et la transmission de savoir sur les formes complexes en architecture: le concepteur ne produit pas une forme issue d'un geste "inspiré" à transmettre à l'exécutant pour une exécution fidèle et servile ; il produit une forme dont il transmet à l'exécutant les points de contrôle et l'algorithme de tracé, le mettant en situation de comprendre parfaitement son geste, de l'adapter au contexte et de participer totalement à l'acte de création. *Une oeuvre architecturale est aboutie quand elle a contribué à l'élévation de tous ceux qui y ont participé ; les cathédrales en sont un bel exemple*.

Un "logiciel" pour les formes pascaliennes

Une implémentation informatique des formes pascaliennes a accompagné cet essai sur les formes gauches, permettant de les visualiser, de les manipuler, de tester certains concepts et, dans un certain sens, de valider les constructions étudiées au départ de façon théorique. Certaines propriétés, certains théorèmes n'ont pas été démontrés sur la base d'un raisonnement mathématique, mais par la construction d'algorithmes aboutissant à un résultat infirmant *manifestement* ou confirmant *apparemment* la propriété supposée.

L'outil de développement finalement choisi est le logiciel POVRAY, outil de ray-tracing bien connu fonctionnant sur toutes les plateformes, librement disponible ainsi que ses sources à l'adresse: http://www.povray.org. Au delà de la qualité de ses rendus, ce logiciel dispose d'un format de fichier texte pur embarquant de nombreuses primitives géométriques (y compris dans R4) et un véritable langage de programmation, grace auquel il a été possible d'écrire une librairie consacrée aux formes pascaliennes (pFlib.inc), disponible sur le site http://marty.alain.free.fr.